На правах рукописи
УДК 517.5

Сандакова Светлана Леонидовна

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Екатеринбург — 2005

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций
Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук
БАДКОВ Владимир Михайлович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
СУЕТИН Павел Кондратьевич

кандидат физико-математических наук
АКОПЯН Роман Размикович

Ведущая организация:
Саратовский государственный университет

Защита состоится «_____» ___________________ 2005 г. в ________ часов на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико–математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А. М. Горького.

Автореферат разослан «_____» ___________________ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В дальнейшем используются обозначения $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{N}$ для множеств всех комплексных, действительных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно.

При $1 \leqslant r \leqslant \infty$ через $L^r[a,b]$ обозначим пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[a,b]$ комплекснозначных функций F с конечной нормой $\|F\|_{L^r[a,b]}$, где

$$\|F\|_{L^r[a,b]} = \left(\int_a^b |F(t)|^r dt\right)^{1/r} \quad (1 \leqslant r < \infty), \quad \|F\|_{L^\infty[a,b]} = \operatorname{ess}\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |F(t)|.$$

Полагаем $\|F\|_r = (\frac{1}{2\pi})^{1/r}\|F\|_{L^r[0,2\pi]}$, $L^r = L^r[0,2\pi]$ для 2π-периодических функции F. Через $C_{2\pi}$ обозначается пространство непрерывных 2π-периодических комплекснозначных функций $F(\tau)$ с равномерной нормой $\|F\| = \max\limits_{\tau\in\mathbb{R}} |F(\tau)|$.

Модулем непрерывности на отрезке $[a,b]$ *функции* $F(t)$ называется $\omega(F;\delta)_{\infty,[a,b]} = \operatorname{ess}\sup\{|F(t_2) - F(t_1)|;\ t_1,t_2 \in [a,b],\ |t_2 - t_1| \leqslant \delta\}$ $(\delta \geqslant 0)$. Модуль непрерывности 2π-периодической функции F в пространстве L^r по определению есть $\omega(F;\delta)_r := \sup\limits_{|\lambda|\leqslant\delta} \|F(\lambda+\cdot) - F(\cdot)\|_r$.

Неубывающая непрерывная полуаддитивная на $[0,\infty)$ функция ω, для которой $\omega(0) = 0$, называется *модулем непрерывности*. Если, вдобавок, ω удовлетворяет условию

$$\omega((t_1+t_2)/2) \geqslant (\omega(t_1)+\omega(t_2))/2 \quad \text{при всех} \quad t_1,t_2 \geqslant 0,$$

то она называется *вогнутым модулем непрерывности.*

Неотрицательная, суммируемая и неэквивалентная нулю на $[a,b]$ функция $p(t)$ называется *весом* на $[a,b]$. Пусть $\{\Phi_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0,2\pi]$ с весом $\varphi \in L^1$ система тригонометрических полиномов, полученная из последовательности

$$1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$$

методом ортогонализации Грама – Шмидта. Если $F\varphi \in L^1$, то имеют смысл суммы Фурье

$$s_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\tau) D_{\varphi,n}(\theta,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \theta \in \mathbb{R}), \quad (1)$$

где

$$D_{\varphi,n}(\theta,\tau) := \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(\theta)\Phi_k(\tau). \tag{2}$$

При $\varphi(\tau) \equiv 1$ сумма $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ совпадает с обычной суммой Фурье $s_n(F;\theta)$ функции F. Скорость приближения функции $F \in C_{2\pi}$ суммой (1) оценивается по неравенству Лебега

$$|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| \leqslant\ (1 + L_{\varphi,n}(\theta))\, E_n(F) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \theta \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

где

$$L_{\varphi,n}(\theta) = \sup_{F\in L^\infty, \|F\|_\infty \leqslant 1} |s_{\varphi,2n}(F;\theta)| = \sup_{F\in C_{2\pi}, \|F\|_\infty \leqslant 1} |s_{\varphi,2n}(F;\theta)| \tag{4}$$

есть функция Лебега сумм $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$, а $E_n(F)$ — наилучшее равномерное приближение функции $F \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

При $\varphi(\tau) \equiv 1$ величина $L_{\varphi,n}(\theta)$ совпадает с известной константой Лебега. Ее асимптотические свойства подробно изучены в работах А. Лебега, Л. Фейера, Г. Гронуолла, Г. Сегё и других авторов.

В связи с неравенством (3) возникают важные для теории приближения функций задачи о его точности и об оценках входящих в его правую часть величин. Решению этих задач, а также аналогичных задач в случае многочленов, ортогональных с весом на отрезке, посвящено много работ. Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Если $F \in C_{2\pi}$, то в силу (3) в каждой точке θ, в которой

$$\lim_{n\to\infty} L_{\varphi,n}(\theta) E_n(F) = 0, \tag{5}$$

ряд Фурье функции F сходится к $F(\theta)$, причем сходимость этого ряда равномерна на любом множестве $E \subset \mathbb{R}$ точек θ, на котором соотношение (5) выполняется равномерно. Поэтому представляет интерес задача о двусторонних поточечных оценках функции Лебега (4) в зависимости от $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$, т. е. задача нахождения более или менее простого выражения, отношение к которому функции (4) при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ заключено между двумя положительными константами, зависящими лишь от веса φ.

Аналогичную задачу о двусторонних поточечных оценках функции Лебега сумм Фурье–Якоби при $\alpha, \beta \geqslant -1/2$ решили С. А. Агаханов и Г. И. Натансон [1]. В. М. Бадков [2] распространил этот результат на все значения $\alpha, \beta > -1$ (оценку снизу этой функции получил также А. М. Беленький[3]) и установил аналогичные результаты для обобщенных многочленов Якоби, т.е. многочленов, ортонормированных на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$p(t) = H(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\prod_{\nu=1}^{m}|t-x_{\nu}|^{\gamma_{\nu}} \quad (\alpha, \beta, \gamma_{\nu} > -1; t \in [-1, 1]) \quad (6)$$

в предположении, что входящий в правую часть (6) отграниченный от нуля и бесконечности множитель $H(t)$ удовлетворяет условию Дини $\omega_{[-1,1]}(H; t)t^{-1} \in L^1[0, 1]$. Кроме того, В. М. Бадков[4] получил двусторонние поточечные оценки функции Лебега (4) в случае 2π-периодического обобщенного веса Якоби, т.е. веса

$$\varphi(\tau) = h(\tau)\prod_{\nu=1}^{m}|\sin[(\tau - \theta_{\nu})/2]|^{\gamma_{\nu}} \qquad (\tau \in \mathbb{R}), \qquad (7)$$

удовлетворяющего условиям

$$\gamma_1 > -1, \ldots, \gamma_m > -1; \qquad -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi, \qquad (8)$$

$$h(\tau) \geqslant 0; \qquad h \text{ и } 1/h \in L^{\infty}, \qquad (9)$$

предположив, что выполняется условие Дини

$$\omega(h; \tau)_{\infty}\tau^{-1} \in L^1[0, \pi]. \qquad (10)$$

[1]Агаханов С.А., Натансон Г.И. Функции Лебега сумм Фурье-Якоби // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех. и астрон. - 1968. № 1, вып.1. - С .11-23.

[2]Бадков В. М. Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. - С. 31-45.

[3]Беленький А.М. О разложении функций в ряд Фурье — Якоби // В кн.: Конструктивная теория функций и теория отображений. Киев, 1981, С .35-48 .

[4]Badkov V.M. Estimations for the Lebesgue function and the remainder of the Fourier series with respect to orthogonal polynomials // Functions, series, operators. Amsterdam etc.: North-Holland, 1983. P. 165-181.

При этом он пользовался полученными им же равномерными асимптотическими представлениями алгебраических многочленов, ортогональных на окружности $|z| = 1$ с весом φ, для которого выполняются условия (7)−(10). Затем В.М. Бадков[5] для широкого класса весов φ с особенностями, порядки которых задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности, получил двусторонние поточечные оценки модулей соответствующих многочленов, ортогональных на окружности, и их производных. Пользуясь этими результатами, С.Е. Памятных получил двустороннюю поточечную оценку

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp 1 + \ln[1 + n|\sin(\theta/2)|] \qquad (n \in \mathbb{N}, \ \ \theta \in \mathbb{R}) \tag{11}$$

(знак " $\asymp$ " означает, что отношение левой и правой частей формулы (11) ограничено сверху и снизу положительными константами, не зависящими от $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$) в предположении, что $\varphi(\tau) := [g(|\sin(\theta/2)|)]^{-1}$, где $g(\tau)$ — вогнутый модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям

$$\int\limits_{\theta}^{\pi} \frac{d\tau}{\tau\sqrt{g(\tau)}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{g(\theta)}}\right) \quad (\theta \to +0), \qquad \int\limits_{0}^{\theta} \frac{d\tau}{g(\tau)} = O\left(\frac{\theta}{g(\theta)}\right) \quad (\theta \to +0).$$

Свой результат С.Е. Памятных получил для частного случая веса В.М. Бадкова. В связи с этим стала актуальной задача обобщения результата С.Е. Памятных на случай общего веса В.М. Бадкова. Решению этой задачи посвящена первая глава диссертации.

Вторая глава диссертации посвящена изучению точности неравенства Лебега (3). Точность классического неравенства Лебега на разных классах функций изучали многие авторы.

Аппроксимативные свойства сумм Фурье $s_{\varphi,2n}(F)$ на классе функций $\mathcal{M} \subset C_{2\pi}$ в точке θ принято характеризовать величиной

$$\mathcal{E}_{\varphi,n}(\mathcal{M}) := \sup\{|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in \mathcal{M}\}. \tag{12}$$

Через H_ω обозначим класс функций $F \in C_{2\pi}$, у которых модуль непрерывности в $C_{2\pi}$ не превосходит заданного модуля непрерывности ω. Полагаем также

$$H_\omega[a,b] = \{F : \ F \in L^\infty[a,b], \ \omega(F;\delta)_{\infty,[a,b]} \leqslant \omega(\delta) \ \text{ для всех } \delta \geqslant 0\}.$$

[5]Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. - 1992. Т.198. С .41-88
.

Рассматриваем классы $W^r H_\omega = \{F : F \in C_{2\pi}^{(r)}, F^{(r)} \in H_\omega\}$ и $W^r H_\omega[a,b] : = \{F : F \in C_{[a,b]}^{(r)}, F^{(r)} \in H_\omega[a,b]\} \quad (r \in \mathbb{Z}_+)$.

Согласно известной теореме Джексона, если периодическая функция F имеет непрерывную производную порядка $r \geqslant 0$ с модулем непрерывности $\omega(F^{(r)};\delta)_\infty$, то при любом натуральном n существует тригонометрический полином T_n^* порядка не выше n такой, что

$$E_n(F) \leqslant \|F - T_n^*\|_\infty \leqslant B_r\, n^{-r}\, \omega(F^{(r)}; n^{-1})_\infty, \tag{13}$$

где $B_r > 0$ зависит лишь от r. Если $F \in W^r H_\omega$, то в силу (4) и (13) в каждой точке θ, в которой

$$\lim_{n\to\infty} L_{\varphi,n}(\theta) n^{-r} \omega(n^{-1}) = 0, \tag{14}$$

сумма $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ сходится к $F(\theta)$ равномерно на любом множестве $E \subset \mathbb{R}$, на котором соотношение (14) выполняется равномерно. Скорость этой сходимости по порядку не превосходит $\frac{1}{n^r}\omega(\frac{1}{n})L_{\varphi,n}(\theta)$.

В случае, когда $\varphi \equiv 1$, $\mathcal{M} = W^r H_\omega$, величина (12) совпадает с

$$\mathcal{E}_n(W^r H_\omega) := \sup\{|F(\theta) - s_n(F;\theta)| : F \in W^r H_\omega\}. \tag{15}$$

Величина (15) достаточно подробно изучена. Оценки ее порядка в случае $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ получили еще А. Лебег и С.Н. Бернштейн. Первую асимптотически точную оценку величины (15) получил А.Н. Колмогоров для случая $\omega(t) = t$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Исследования в этом направлении продолжили С.М. Никольский, В.Т. Пинкевич, А.В. Ефимов, С.А. Теляковский, С.Б. Стечкин, А.И. Степанец и другие авторы. В.М. Бадков[6] величину (12) изучал в случае класса $\mathcal{M} = W^r H_\omega$ и 2π-периодического обобщенного веса Якоби, удовлетворяющего условиям (7)$-$(10). В случае общего веса В.М. Бадкова величина (12) пока еще мало изучена.

Таким образом, рассматриваемые в диссертации задачи о двусторонних поточечных оценках функции Лебега (4) и о точности неравенства Лебега (3) являются достаточно актуальными задачами теории приближения функций.

[6] Бадков В.М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. - 1980. Т.145. С .20-62.

Цель работы. Основной целью настоящей работы является исследование аппроксимативных свойств сумм Фурье по системе тригонометрических полиномов, ортогональной с неклассическим весом, порядки особенностей которого задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности. В рамках этой общей проблемы выделяются следующие задачи.

Получение двусторонниих поточечных оценок функции Лебега сумм Фурье по рассматриваемой системе;

Доказательство точности неравенства Лебега на классе $W^r H_\omega$ в случае приближения функций их суммами Фурье по рассматриваемой системе;

Построение примера функции класса $W^r H_\omega$, для которой неравенство Лебега является точным на бесконечной подпоследовательности номеров в нуле рассматриваемого веса.

Построение аналогичного примера функции класса $W^r H_\omega[-1, 1]$ в случае обобщенного веса Якоби.

Основной метод исследования. В диссертации используются методы теории приближения функций, теории ортогональных многочленов, гармонического анализа, теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми и состоят в следующем:

1) Получена двусторонняя поточечная оценка функции Лебега сумм Фурье по системе тригонометрических полиномов, ортогональной с весом весьма общего вида, порядки особенностей которого задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности. Этот класс весов содержит все классические периодические веса. Обнаружено существование неограниченных систем ортогональных тригонометрических полиномов, функции Лебега сумм Фурье которых во всех точках по порядку совпадают с обычной константой Лебега.

2) Доказана точность неравенства Лебега на классе $W^r H_\omega$ в случае приближения функций их суммами Фурье по рассматриваемой системе.

3) Построен пример функции класса $W^r H_\omega$, для которой неравенство Лебега является точным на бесконечной подпоследовательности номеров в нуле рассматриваемого веса.

4) Построен аналогичный пример функции класса $W^r H_\omega[-1,1]$ в случае обобщенного веса Якоби.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут найти применение при изучении рядов Фурье по ортогональным полиномам и их различных приложений в теории аппроксимации.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры математического анализа и теории функций УрГУ, руководимом профессором В.В. Арестовым; на семинаре по теории приближения функций ИММ УрО РАН, руководимом членом-корреспондентом РАН, профессором Ю.Н. Субботиным и профессором Н.И. Черных (г. Екатеринбург); на Международной школе С.Б. Стечкина по теории функций (г.Миасс, 2003 и 2004 гг.),а также на 32-й, 33-й, 34-й, 35-й и 36-й Региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (г. Екатеринбург, 2001, 2002, 2003, 2004 и 2005 гг.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в восьми работах [1]–[8], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, двух глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объем работы — 75 страниц. Библиография содержит 70 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит краткую историю вопроса, формулировки и описание основных утверждений диссертации.

В первой главе получена двусторонняя поточечная оценка функции Лебега сумм Фурье по системе тригонометрических полиномов, ортогональной с весом весьма общего вида, порядки особенностей которого задаются конечными произведениями действительных степеней вогнутых модулей непрерывности.При этом обнаружено существование неограниченных систем ортогональных тригонометрических полиномов, функции Лебега сумм фурье которых во всех точках по порядку совпадают с обычной константой Лебега.

Во второй главе доказана точность неравенства Лебега на классе $W^r H_\omega$ в случае приближения функций их суммами Фурье по рассматриваемой системе. Построен пример функции класса $W^r H_\omega$, для которой неравенство Лебега является точным на бесконечной подпоследовательности номеров в нуле рассматриваемого веса. Построен аналогичный пример функции класса $W^r H_\omega[-1,1]$ в случае обобщенного веса Якоби.

Перейдем к более подробному изложению результатов диссертационной работы.

В § 1.1 приведена краткая история вопроса и сформулирован основной результат главы 1. В § 1.2 сформулированы вспомогательные предложения (как известные, так и новые), используемые при доказательстве основного результата главы 1. Новыми являются следующие две леммы (для удобства ссылок сохраняем нумерацию утверждений, принятую в диссертации).

Лемма 1.2.1. *Пусть вес* $\varphi \in L^1$, *а*

$$K_n(\varphi; z, \zeta) := \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)} \qquad (n \in \mathbb{Z}_+;\ z, \zeta \in \mathbb{C})$$

– ядро Сегё системы $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *алгебраических многочленов, ортонормированной на окружности* $|z| = 1$ *с весом* φ. *Тогда выполняется неравенство*

$$L_{\varphi,n}(\theta) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{2n}(\varphi; e^{i\theta}, (1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|\varphi(\tau)\, d\tau \qquad (n \in \mathbb{N};\ \theta \in \mathbb{R}).$$

Лемма 1.2.2. *Пусть вес* $\varphi(\tau)$ *принадлежит* L^1 *вместе с* $\ln\varphi(\tau)$. *Тогда для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\theta \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$L_{\varphi,n}(\theta) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{2n}(\varphi; e^{i\theta}, (1-(2n)^{-1})e^{i\tau})| \frac{d\tau}{|\pi(\varphi; (1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|^2},$$

где

$$\pi(\varphi; z) := \exp\left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} \ln\varphi(\tau)\, d\tau \right\} \qquad (|z| < 1)$$

— функция Сегё веса $\varphi(\tau)$.

Основным результатом главы 1 является обобщающая результаты работ В.М. Бадкова и С.Е. Памятных следующая теорема.

Теорема 1.1.1. *Пусть 2π-периодический вес $\varphi(\tau)$ имеет вид*

$$\varphi(\tau) := h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} w_\nu \quad |\sin \frac{\tau - \theta_\nu}{2}| \qquad (-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi),$$

где

$$w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu} [g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1];$$

$m,\ l_\nu \in \mathbb{N}, \quad \alpha(\mu,\nu) \in \mathbb{R}, \quad g_{\mu,\nu}(u)\ (\ \mu = 1, \cdots, l_\nu;\ \nu = 1, \ldots, m)$ — *вогнутые модули непрерывности;*

$$\int\limits_0^\theta w_\nu(\tau)\, d\tau = O(\theta w_\nu(\theta)) \qquad (\theta \to +0;\ \nu = 1, \ldots, m);$$

функция $h(\tau)$ удовлетворяет условиям (9)–(10) *либо условиям*

$$h(\tau) \geqslant 0; \qquad h \text{ и } 1/h \in L^\infty; \qquad \omega(h;\delta)_2 = O(\delta^{\frac{1}{2}}) \qquad (\delta \to +0). \tag{16}$$

Тогда найдутся такие положительные константы $C_1 = C_1(\varphi)$ и $C_2 = C_2(\varphi)$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$C_1 \leqslant \frac{L_{\varphi,n}(\theta)}{\ln(1 + n \prod\limits_{k=1}^{m} |\sin \frac{\theta-\theta_k}{2}|) + g_n(\theta) \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(|\sin \frac{\theta-\theta_k}{2}| + \frac{1}{n})} \leqslant C_2, \tag{17}$$

где

$$g_n(\theta) := \quad \prod_{k=1}^{m} w_k \quad \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} + \frac{1}{n} \quad ^{-\frac{1}{2}}, \qquad A_k(t) := \int\limits_t^\pi \frac{\sqrt{w_k(\tau)}\, d\tau}{\tau}.$$

Доказательство теоремы 1.1.1 проводится в § 1.3 (в случае веса с одной особой точкой) и в § 1.4 (в случае веса с несколькими особыми точками путем сведения к случаю одной особой точки).

В § 1.5 из теоремы 1.1.1 выводятся в виде следствий следующие утверждения.

Следствие 1.5.1. *Пусть вес φ есть 2π-периодический обобщенный вес Якоби, удовлетворяющий условию* (10) *либо условиям* (16).

Положим $\theta_0 = \theta_m - 2\pi$, $\theta_{m+1} = \theta_1 + 2\pi$, $\xi_\nu = 2^{-1}(\theta_\nu + \theta_{\nu+1})$ $(\nu = 0, 1, \dots, m)$ *и рассмотрим интервалы* $\Delta_\nu = (\xi_{\nu-1}, \xi_\nu)$ $(\nu = = 1, \dots, m)$. *Тогда при* $\theta \in \overline{\Delta_l}$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp 1 + \ln(1 + n|\theta - \theta_l|) \qquad (-1 < \gamma_l < 0), \tag{18}$$

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp \ln(n+1) \qquad (\gamma_l = 0), \tag{19}$$

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp \ln(n+1) + (|\theta - \theta_l| + n^{-1})^{-\frac{\gamma_l}{2}} \qquad (\gamma_l > 0). \tag{20}$$

Заметим, что в случае 2π-периодического обобщенного веса Якоби, удовлетворяющего условиям (8)–(10), оценки (18)–(20) впервые получил В.М. Бадков. Приведем еще одно интересное следствие из теоремы 1.1.1.

Следствие 1.5.2. *Пусть вес* φ *имеет вид*

$$\varphi(\tau) := h(\tau)\left(\ln\frac{a}{|\sin(\tau/2)|}\right)^{\delta} \qquad (\tau \in \mathbb{R}), \tag{21}$$

где $a \geqslant e^2$, $\delta \in \mathbb{R}$, $h(\tau)$ *удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме* 1.1.1. *Тогда при* $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp \ln\left[1 + n\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right] + \left(\ln\frac{a}{|\sin\frac{\theta}{2}| + \frac{1}{n}}\right)^{-\frac{\delta}{2}} \qquad (\delta < -2),$$

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp \ln\ 1 + n\ \sin\frac{\theta}{2} \quad + \quad \ln\frac{a}{|\sin\frac{\theta}{2}| + \frac{1}{n}}\Bigg)\ln\ln\frac{a}{|\sin\frac{\theta}{2}| + \frac{1}{n}} \qquad (\delta = -2),$$

$$L_{\varphi,n}(\theta) \asymp \ln(n+1) \qquad (\delta > -2).$$

Следствие 1.5.2 обнаруживает интересное явление: *функция Лебега* $L_{\varphi,n}(\theta)$ *в случае веса* (21) *при* $\delta \in (-2, 0)$ *эквивалентна константе Лебега, определяемой как* $\|L_{\varphi,n}(\cdot)\|_\infty$, *которая по порядку совпадает с классической константой Лебега* (*т. е. константой Лебега для веса* $\varphi(\tau) \equiv 1$). *При этом система* $\{\Phi_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ *для* $\delta < 0$ *не является равномерно ограниченной.*

В § 2.1 приведена краткая история вопроса и сформулирован основной результат главы 2. В §§ 2.2–2.4 сформулированы вспомогательные предложения (как известные, так и новые), используемые при доказательстве основного результата главы 2. Новыми являются следующие две леммы.

Лемма 2.4.1. *Ядро $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$ как функция от τ имеет в интервале $(\theta,\theta+2\pi)$ точно $2n$ различных (и, следовательно, простых) нулей.*

Лемма 2.4.2. *Пусть нули ядра $D_{\varphi,2n}(\theta,\tau)$ (как функции от τ) занумерованы в последовательность*

$$\ldots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \ldots, \tag{22}$$

причем $z_{-1} < \theta < z_0$ и $z_\nu = z_\nu(\theta)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$. Тогда

$$z_{-n} = z_n - 2\pi.$$

Если при этом вес φ удовлетворяет условиям теоремы 1.1.1, *то найдутся положительные числа C_{11} и C_{12}, зависящие лишь от φ, такие, что расстояние между любыми двумя соседними элементами последовательности* (22) *заключено между $C_{11}\,n^{-1}$ и $C_{12}\,n^{-1}$.*

Одним из основных результатов главы 2 является следующая теорема, обобщающая соответствующие результаты В.М. Бадкова и С.Е. Памятных.

Теорема 2.1.1. *Пусть вес φ удовлетворяет условиям теоремы* 1.1.1. *Тогда найдутся положительные постоянные $C_1(\varphi,r)$ и $C_2(\varphi,r)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства*

$$C_1(\varphi,r) \leqslant \frac{\sup\{|F(\theta) - s_{\varphi,2n}(F;\theta)| : F \in W^r H_\omega\}}{(1 + L_{\varphi,n}(\theta))\omega(n^{-1})n^{-r}} \leqslant C_2(\varphi,r). \tag{23}$$

Заметим, что в главе 1 были доказаны неравенства (17), в силу которых функцию Лебега $L_{\varphi,n}(\theta)$ в (23) можно заменить знаменателем дроби из формулы (17). Разумеется, что при этом константы $C_1(\varphi,r)$ и $C_2(\varphi,r)$ в новом неравенстве примут новые значения.

Другим основным результатом главы 2 является пример индивидуальной функции класса $W^r H_\omega$, для которой неравенство Лебега (4) оказывается точным по порядку в нулях веса φ на подпоследовательности номеров n (для каждого нуля своей). Кроме того, построен аналогичный пример индивидуальной функции класса $W^r H_\omega[-1,1]$ в случае обобщенного веса Якоби. А именно, доказаны следующие две теоремы.

Теорема 2.6.1. *Пусть вес* φ *удовлетворяет условиям теоремы* 1.1.1. *Пусть, кроме того, при некотором* $l \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$L_{\varphi,n}(\theta_l) = O(|\varphi_{2n}(e^{i\theta_l})|) \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{24}$$

Тогда для заданных $r \in \mathbb{Z}_+$ *и модуля непрерывности* $\omega(\delta)$, *удовлетворяющего условию*

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)\,du}{u} + \delta \int\limits_\delta^1 \frac{\omega(u)\,du}{u^2} = O(\omega(\delta)), \tag{25}$$

найдутся числа $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ *и* $C_1 > 0$ *такие, что функция*

$$F(\tau) := C_1 u_s(\tau) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{m} \frac{\omega(2^{-m\nu-q}) D_{\varphi,2^{m\nu+q+1}}(\theta_q, \tau)}{2^{r(m\nu+q)} |\varphi_{2^{m\nu+q+1}}(e^{i\theta_q})|},$$

где $D_{\varphi,n}(\theta,\tau)$ *определено в* (2),

$$u_s(\tau) := \prod_{\mu=1}^{m} \left(\sin \frac{\tau - \theta_\mu}{2}\right)^{2s_\mu}; \quad s = s_1 + \dots + s_m,$$

принадлежит классу $W^r H_\omega$, *причем,*

$$E_n(F) \asymp n^{-r}\omega(n^{-1}) \ \ (n \in \mathbb{N})$$

и при достаточно больших $N := 2^{mn+l}$

$$|F(\theta_l) - s_{\varphi,2N}(F;\theta_l)| \asymp [L_{\varphi,N}(\theta_l) + 1] E_N(F).$$

Заметим, что из основного результата главы 1 (см. теорему 1.1.1) следует, что в формулировке теоремы 2.6.1 условие (24) равносильно условию $\tau^{-1}[w_l(\tau)]^{\frac{1}{2}} \in L^1[0,1]$.

Теорема 2.7.1. *Пусть вес* p *имеет вид*

$$p(x) = H(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \prod_{k=1}^{M} |x - x_k|^{\delta_k} \qquad (x \in [-1,1]),$$

где $M \in \mathbb{N}$; $\alpha, \beta, \delta_k > -1$; $-1 < x_1 < \ldots < x_M < 1$;
$H(x) \in C[-1,1]$; $H(x) > 0$ *на всем* $[-1,1]$; $\omega_{[-1,1]}(H;\delta)\delta^{-1} \in L^1[0,1]$. *Положим* $x_0 = -1$, $x_{M+1} = 1$. *Пусть, кроме того, при некотором* $l \in \{0, 1, \ldots, M+1\}$

$$L_n^{(p)}(x_l) = O(|p_n(x_l)| + |p_{n+1}(x_l)|) \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{26}$$

Тогда для заданных $r \in \mathbb{Z}_+$ *и модуля непрерывности* $\omega(\delta)$, *удовлетворяющего условию* (25), *существует функция* f, *принадлежащая классу* $W^r H_\omega[-1,1]$, *такая, что на подпоследовательности номеров* $n_N = 2^{(M+2)N+l}$ *выполняется соотношение*

$$|f(x_l) - S_{n_N}^{(p)}(f;x_l)| \asymp (1 + L_{n_N}^{(p)}(x_l))E_{n_N}(f),$$

при этом

$$E_n(f) \asymp n^{-r}\omega(n^{-1}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что в формулировке этой теоремы условие (26) равносильно условию $\delta_l > 0$ при $l \in \{1, 2, \ldots, M\}$, $\alpha > -1/2$ при $l = 0$ или $\beta > -1/2$ при $l = M+1$.

Кроме того, заметим, что в случае рядов Фурье–Якоби примеры индивидуальных функций, подтверждающие точность неравенства Лебега в точке $x = 1$ при $\alpha > -1/2$, были приведены в работах В.М. Бадкова, И.И. Шарапудинова и А.М. Беленького. Однако в работах В.М. Бадкова и А.М. Беленького $\omega(t) = t^\mu$ $(0 < \mu \leqslant 1)$, а в работе И.И. Шарапудинова функция f является аналитической.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю В.М. Бадкову за постановку задач и внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Сандакова С.Л. *Двусторонняя поточечная оценка функции Лебега сумм Фурье по тригонометрическим ортогональным полиномам* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 32-й Региональной молодежной конференции.- Екатеринбург, 2001. – С. 46–49.

[2] Сандакова С.Л. *Оценки функции Лебега сумм Фурье по ортогональным полиномам* // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. - Саратов, изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2002. – С. 185.

[3] Сандакова С.Л. *Оценка функции Лебега сумм Фурье по системе тригонометрических полиномов, ортогональной с весом* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 33-й Региональной молодежной конференции.- Екатеринбург, 2002. – С. 76–78.

[4] Сандакова С.Л. *Оценки функции Лебега сумм Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным с весом, имеющим особенности* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 34-й Региональной молодежной конференции.- Екатеринбург, 2003. – С. 74–76.

[5] Сандакова С.Л. *Приближение функций суммами Фурье по тригонометрическим ортогональным полиномам* // Современные проблемы краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XV". Воронеж: ВГУ, 2004. С. 199–200.

[6] Сандакова С.Л. *О точности неравенства Лебега в нуле веса тригонометрических ортогональных полиномов* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 35-й Региональной молодежной конференции.- Екатеринбург, 2004. – С. 95–99.

[7] Sandakova S.L. *Two-sided Pointwise Estimate for Lebesgue Function of Fourier Sums with Respect to Trigonometric Orthogonal Polynomials* // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl.1, 2004. P. S207–S223.

[8] Сандакова С.Л. *О точности неравенства Лебега в нуле веса обобщенных многочленов Якоби* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 36-й Региональной молодежной конференции. - Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С. 96–100.

Подписано в печать
Формат 60 ×84 1/16 Бумага типографская. Усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № . Печать офсетная.
Екатеринбург, К-83, пр. Ленина, 51. Типолаборатория УрГУ